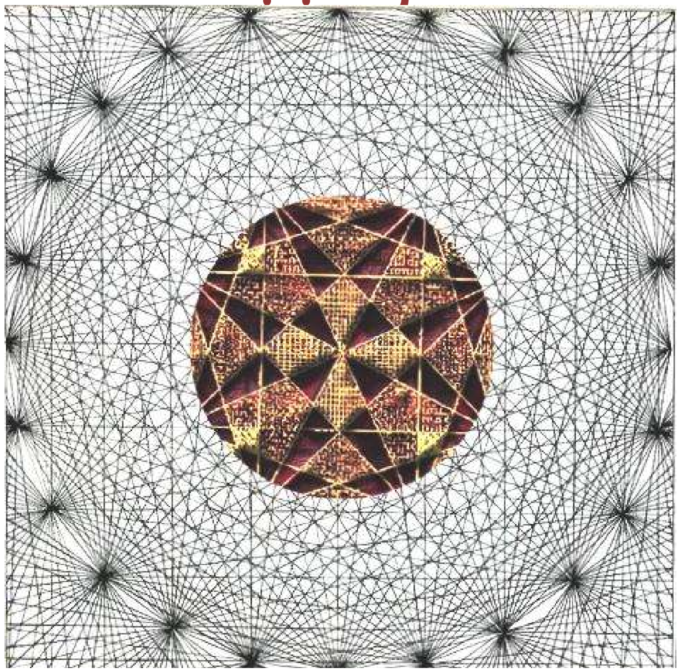
Συμμετρια



N.32 – Settembre 2014

In questo Numero:

Cenni di Matematica Pre-Euclidea

di Gianluca Ciampi

Selezione di articoli, commenti, riedizioni, estratti e segnalazioni relative alle attività di Simmetria.

L'antologia , si affianca alla rivista cartacea di Simmetria, ha lo stesso comitato direttivo ed editoriale e sviluppa temi particolari, prescelti fra quelli di maggiore interesse fra i nostri lettori.
Ha un carattere aperiodico e viene inviata gratuitamente a tutti i soci ed amici che ne facciano richiesta.

SIMMETRIA Associazione Culturale - Via Muggia 10 – 00195 Roma e-mail: info@simmetria.org

Associazione Culturale
Via Muggia 10 – 00195 Roma
e-mail: info@simmetria.org

e perché fossero più degne delle Muse, in un'ottica di profilo platonico, è comprensibile, altrimenti per quale motivo coniare poi il termine **Teo**rema?

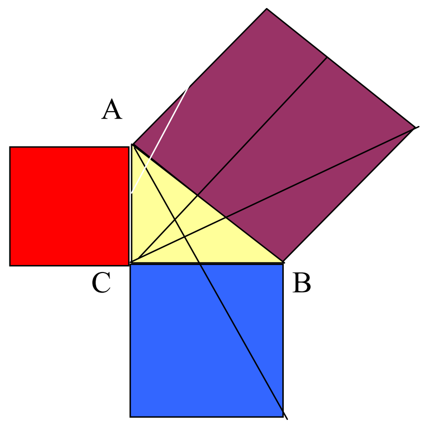
D'altronde, l'abbiamo già accennato, data l'importanza per i numeri interi, che nutrivano i pitagorici, quella che noi ipotizziamo essere l'applicazione delle aree, funziona sempre per qualsiasi numero intero, e quindi va a costruire sempre una terna pitagorica di interi, viceversa la terna, in sé, non può essere costruita da qualsiasi numero intero. Allo stesso modo se costruiamo qualsiasi gnomone su un qualsiasi quadrato non è affatto detto che lo gnomone equivalga ad un altro quadrato, ma se quadrato e gnomone sono costruiti per gli stessi x ed y di interi, abbiamo già visto, lo gnomone sarà per forza un quadrato.

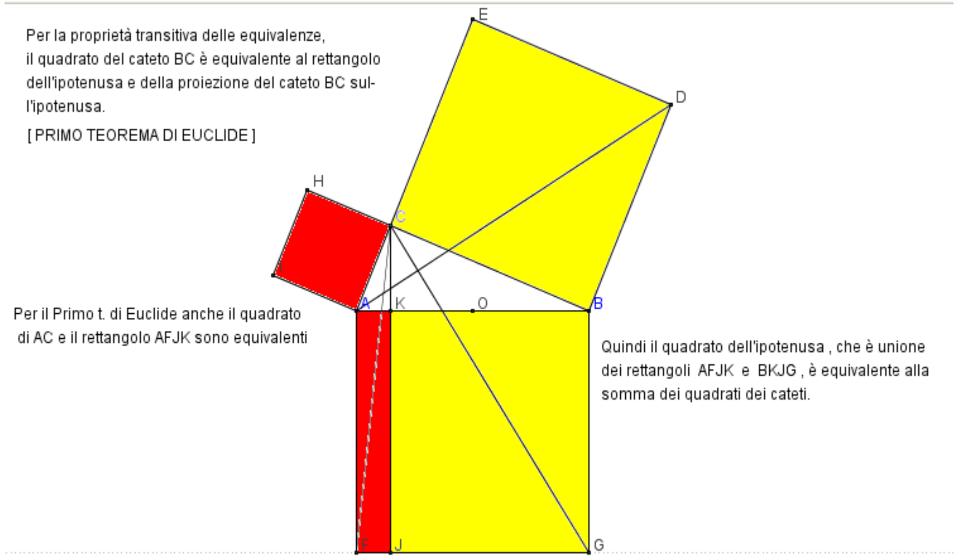
L'approccio platonico al numero ed alla matematica fu in gran parte abbandonato da Euclide e da chi lo seguì (eccezion fatte per Diofanto, alcuni arabi, Fibonacci stesso e pochi altri), è va riconsiderato nella giusta misura, in special modo per studi sulla scienza dei numeri ed analisi del numero.

Cenni di matematica
Pre-Euclidea
Συμμετρια
Associazione Culturale
Via Muggia 10 – 00195 Roma
e-mail: info@simmetria.org

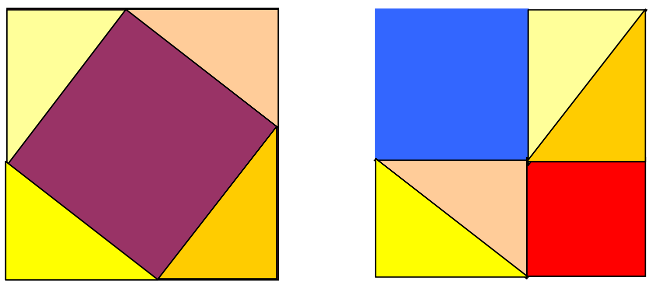
The dark side of the Phytagora Theorem

La nostra ipotesi è che esistesse un corpus matematico precedente agli Elementi di Euclide piuttosto solido ed interessante a cui Euclide stesso, come ben sappiamo, ha attinto, ma che, in parte, ha tralasciato per poter meglio costruire la Geometria Euclidea come ancor oggi la conosciamo.
I motivi potevano essere vari, basti pensare che il pensiero aristotelico, in quel periodo storico, andava soppiantando il pensiero platonico e, diremo, più tradizionale; questo contesto non fu ininfluente nella storia del pensiero matematico. Tutto il nostro studio ruoterà intorno al Teorema di Pitagora. Ci baseremo su quello che ci è stato lasciato dalla storia e da studi precedenti.
La nostra ipotesi è che questa matematica, diremmo pre-euclidea, abbia ancora qualcosa da dirci.
Euclide ci ha lasciato due dimostrazioni del Teorema di Pitagora:
$c^2 = a^2 + b^2$
La prima è quella che abbiamo tutti studiato a scuola: (in un triangolo rettangolo l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti), sinteticamente:





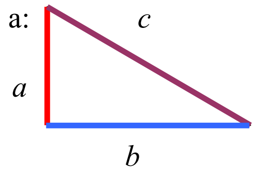
La seconda che si usa meno, la troviamo sempre sugli Elementi

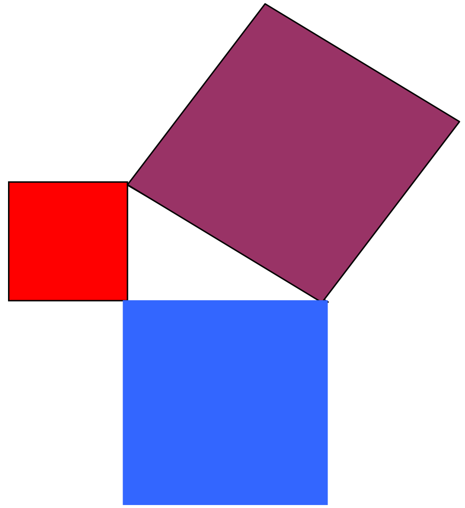


Mentre la prima dimostrazione è prettamente geometrica; sicuramente nella modalità della geometria euclidea (non sappiamo se Pitagora ed i pitagorici l'avessero coniata precedentemente allo stesso modo, secondo molti autori sì), la seconda dimostrazione è più di tipo aritmogeometrico e sicuramente più nelle corde dei pitagorici. Ma, premesso ciò, ci vorremmo focalizzare su una preposizione degli Elementi di Euclide, quasi sempre tralasciata, che in sintesi ci dice che:

$c = x^2 + y^2$, $a = y^2 - x^2$ e $b = 2xy$.

Quindi si arrivò a:





Da tutto ciò, secondo noi, si evince cosa intendessero Proclo e Plutarco, per l'applicazione delle aree dei pitagorici:
- Proclo: *"Secondo Eudemo è un antico ritrovato della Musa dei pitagorici anche questo: l'applicazione di aree, l'eccesso, il difetto…."*
- Plutarco ne accenna due volte a proposito del sacrificio che Pitagora avrebbe fatto per celebrare il suo insigne ritrovato geometrico, che Plutarco stesso non sa se fosse il Teorema dell'ipotenusa o l'applicazione di aree (..*più elegante e più degno delle muse*).

Ai tempi dei due storici si era già persa gran parte della conoscenza dei pitagorici, ma evidentemente ancora riecheggiava qualcosa sull'applicazione delle aree. Aree sì, ma aree aritmometriche, quindi algebriche e non geometriche (questo in una filosofia platonica sarebbe ancora comprensibile):

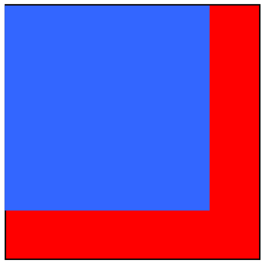
x^2	xy
xy	y^2

Possiamo ipotizzare che l'eccesso fosse $c = x^2 + y^2$,
Il difetto $a = y^2 - x^2$ a cui va aggiunto $b = 2xy$.
Potremmo aggiungere che il sacrificio che cita Plutarco, poteva essere e, per il Teorema di Pitagora, e, per l'applicazione delle aree (poiché il Teorema di Pitagora è conseguenza geometrica della applicazione delle aree);

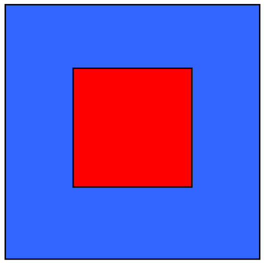
gebrico: $(x^2+y^2)^2=(y^2-x^2)^2+(2xy)^2$, quindi se $c=x^2+y^2$, $a=y^2-x^2$ e $b=2xy$

A questo punto si passa dal numero algebrico a quello geometrico (o se preferiamo dal numero di qualità al numero di quantità, o ancora per i platonici dal mondo iperuranico archetipale al mondo manifesto), Da qui: $c^2=a^2+b^2$

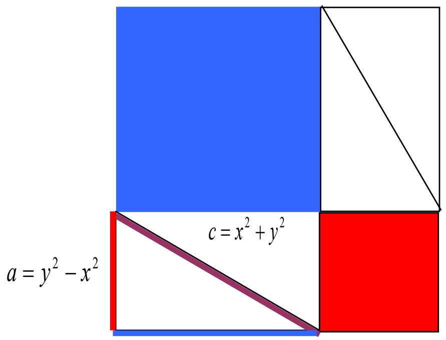
In una prima fase era sufficiente questa dimostrazione di tipo aritmogeometrico, come già visto:

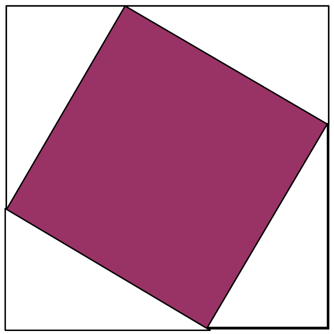


O quest'altra



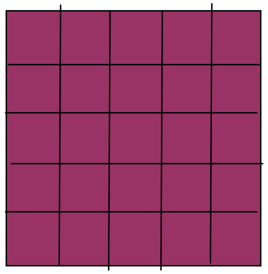
Successivamente sempre attraverso un procedimento aritmogeometrico ci si avvicinò alla geometria, come la conosciamo noi:

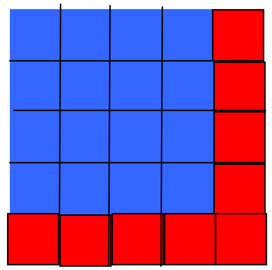




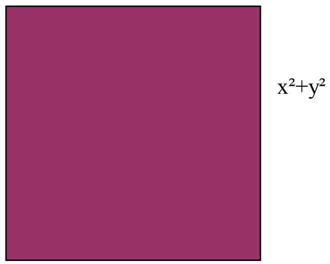
Lemma 1 preposizione X, 29 (usata anche, poi, nella matematica di Diofanto), secondo noi di radice prettamente pitagorica e sicuramente (O. Neugebauer, commento alla tavola d'argilla in cuneiforme Plimpton, ripreso da Boyer ed altri storici della matematica) sorta nell'antica Persia.

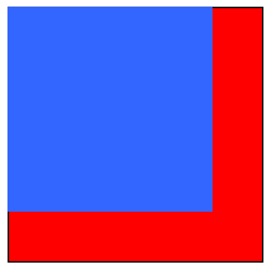
Conosciamo già gli gnomoni dei pitagorici, vedremo che di fatto essi stessi sono una dimostrazione aritmogeometrica del Teorema di Pitagora, anche se, apparentemente, noi saremmo costretti a contare i quadratini dello gnomone stesso (tutti i quadratini rossi, in figura) per verificare se la loro somma sia un quadrato o meno.





Ma se ci rifacciamo al lemma 1 preposizione X, 29 (tale Lemma poi verrà commentato da: Teone, Leonardo da Pisa, Zamberti, Tartaglia, Commandino e da alcuni arabi; oltre all'asse Diofanto-Bachet-Fermat), vediamo che gli gnomoni pitagorici vanno riconsiderati, anche in relazione alla predetta preposizione.



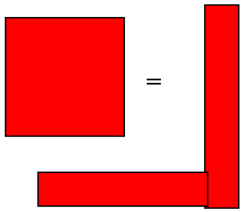


Il quadrato viola è uguale a $y^4+2x^2y^2+x^4$, quello azzurro è uguale a $4x^2y^2$, mentre per lo gnomone rosso: poiché la differenza tra $c=x^2+y^2$ e $b=2xy$ è uguale appunto a $(x^2+y^2)-2xy$ che a sua volta moltiplicata per $c=x^2+y^2$ è uguale a $x^4+y^4+2x^2y^2-2x^3y-2xy^3$ e che moltiplicata per $b=2xy$ è uguale a $-4x^2y^2+2x^3y+2xy^3$ e che a loro volta sommate ci danno $x^4+y^4-2x^2y^2=(y^2-x^2)^2=a^2$, appunto anche lui un quadrato:

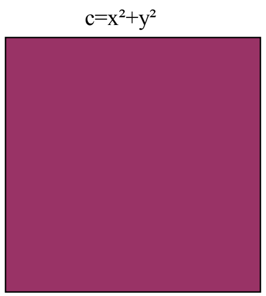
$$(x^2+y^2-2xy)(x^2+y^2)+(x^2+y^2-2xy)2xy=x^4-2x^2y^2+y^4=(y^2-x^2)^2$$

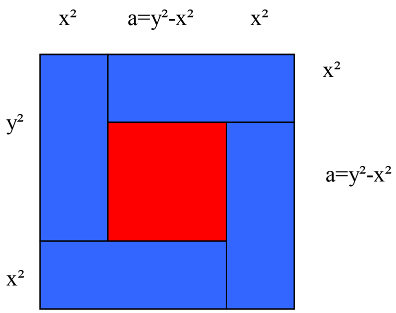
Se le x e le y che scegliamo sono numeri interi avremo un terna a, b, c di interi e costruiremo un triangolo rettangolo di interi, se le x e/o le y, non sono interi (sappiamo che questa seconda ipotesi interessava meno ai pitagorici) potremo costruire qualsiasi triangolo rettangolo (come nella geometria euclidea).

In sintesi, quello che vorremmo sottolineare è, che usando x ed y di interi, qualsiasi gnomone costruissero i pitagorici stessi, era, come visto, un area equivalente ad un quadrato e non c'era modo di sbagliare seguendo questo metodo.



I pitagorici e probabilmente gli orientali stessi, avevano anche un'altre strada da seguire:



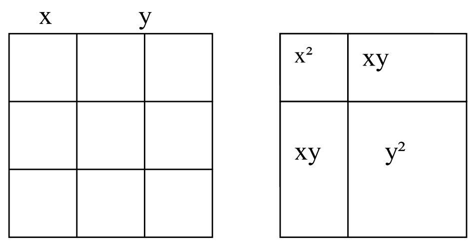


Il quadrato viola è uguale a $y^4+2x^2y^2+x^4$, come già visto, quello rosso è uguale a $y^4-2x^2y^2+x^4$; per i 4 rettangoli azzurri: ancora più semplice della precedente poiché ogni rettangolo è (facilmente notabile) x^2y^2, e dato che i rettangoli sono uguali e sono quattro, avremo 4 x^2y^2 appunto b^2, anche lui un quadrato.

$$4(x)^2(x^2+y^2-x^2)=4x^2y^2$$

Questa seconda versione aritmogeometrica è l'esatto opposto della prima (cioè quella a forma di gnomone), nel primo caso lavoriamo sulla differenza tra l'ipotenusa ed il cateto di ordine pari (il cui quadrato è azzurro), nel secondo caso (a forma di mandala), lavoriamo sulla differenza tra l'ipotenusa ed il cateto di ordine dispari (il cui quadrato è rosso), sempre costruiti da x ed y interi.
Di fatto queste due forme, diciamo a gnomone e a mandala (se costruite da x ed y di interi), sono già due dimostrazioni aritmogeometriche. E perché la seconda, l'abbiamo detta più orientale?
Non a caso la forma è a mandala, ma per i più esigenti basta andarsi a vedere il Ciou-pei della Cina od il Bahaskara dell'India.

In matematica molti studi geometrici hanno fatto luce su interessanti soluzioni algebriche, difficili a cogliersi e a dimostrarsi senza il supporto della geometria, ma in questo caso e cioè da un'attenta analisi storica del Teorema di Pitagora, possiamo dire che l'origine è di tipo algebrico e, almeno per quello che abbiamo realmente conservato nei secoli, nasce nell'antica Persia. Successivamente i pitagorici l'hanno generalizzata e portata a forma di geometria o perlomeno aritmogeometria ed Euclide l'ha immortalata e tramandata. Ci dispiace dover coniare un nuovo termine oltre la geometria e l'aritmogeometria, ma secondo noi esisteva, quindi, una modalità di fare calcolo algebrico attraverso figure piane, che però rappresentavano solo numeri, in quanto tali e non dimensioni (in ordine cronologico l'ultimo che ne parla è Homar Khayyam).
Potremmo coniarlo con il termine aritmetrica o aritmometria (o anche algebrometria) a cui poi seguirà l'aritmogeometria, a cui ancora dopo, segue la geometria.
Aritmetrica: (in questo caso x=1 e y=2, ma funziona per qualsiasi numero)



Che cosa si era notato osservando il quadrato di un binomio come sviluppo al-